حدِ پایینی برای تعدادِ رنگین‌کمان‌هایِ* منتظم در رنگ‌آمیزیِ یالیِ گرافِ K_n

بهداد اسفهبد عبادالله محمودیان

چکیده

مربع‌های لاتین و مباحثِ مرتبط با آن‌ها یکی از جالب‌ترین و پرکاربردترین بخش‌های ترکیبیات می‌باشند، در این مقاله با تعاریفِ زمان‌بندیِ تورنمنتِ ساعتی و رنگین‌کمان آشنا می‌شویم، سپس روشی برای یافتنِ چند رنگین‌کمان در گراف K_n ارایه می‌دهیم.

۱ زمان‌بندیِ تورنمنتِ ساعتی و رنگین‌کمان

یک زمان‌بندی برای یک تورنمنت برابر است با افرازِ یال‌های K_n به $n-۱$ تطابقِ کامل. قضیه‌ی مشهوری وجود دارد که برای هر $n > ۴$ زوج، یال‌های K_n قابلِ رنگ‌آمیزی با $n-۱$ رنگ است. روشِ ساختِ یک نمونه از این رنگ‌آمیزی (زمان‌بندی) در لِمِ زیر آمده است:

لم ۱. به ازای هر $n > ۴$ زوج، یال‌های K_n قابلِ رنگ‌آمیزی با $n-۱$ رنگ است.

اثبات. راس‌های K_n را با عناصرِ مجموعه‌ی $\{\infty, ۰, ۱, ۲, \ldots, n-۲\}$ شماره‌گذاری می‌کنیم. یک رنگ‌آمیزی از K_n به این صورت معرفی می‌کنیم: یال‌های با رنگِ i ($۰ \le i \le n-۲$)، عبارتند از

$$\{\{\infty, i\}, \{i-۱, i+۱\}, \{i-۲, i+۲\}, \ldots, \{i-\frac{n}{۲}+۱, i+\frac{n}{۲}-۱\}\} \pmod{n-۱}$$

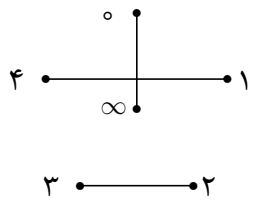
به این رنگ‌آمیزی، رنگ‌آمیزیِ ساعتی می‌گوییم و اگر راسِ ∞ را مرکز یک دایره قرار دهیم و راس‌های ۰ تا $n-۲$ را با فواصلِ برابر روی محیطِ دایره بگذاریم، یال‌های با رنگ i برابرند با یالی که مرکز را به راسِ i وصل می‌کند و کلیه یال‌های عمود بر آن. در نتیجه چون $n-۱$ فرد است دو یال در صورتی همرنگ خواهند بود که:

*Transversal

۱) بر هم عمود باشند، که دراین صورت یکی از آن‌ها یالِ مرکزی(یک سر آن ∞ است) و دیگری یالِ غیرمرکزی است.

۲) با هم موازی باشند، که در این صورت هر دو یالِ غیرمرکزی هستند.

همچنین هیچ دو یالِ مرکزی همرنگ نیستند و اگر طولِ یک یالِ غیرمرکزی را برابر ۱ به‌اضافه‌ی حداقلِ تعداد رئوسِ روی مسیری بگیریم که روی محیطِ دایره یک سرِ یال را به سرِ دیگر وصل می‌کند و طولِ یال‌های مرکزی را صفر در نظر بگیریم، آنگاه هر رنگ از یال‌های به طول ۰ تا ۱ $-\frac{n}{۲}$، از هر کدام دقیقاً یک عضو دارد، و در نتیجه هیچ دو یالِ با طولِ یک‌سان همرنگ نیستند.



یالهای رنگ ۰ در $K_۶$

□

یک رنگین‌کمان در یک رنگ‌آمیزی یالی یک گراف، تطابقِ کاملی است که هیچ دو یالی در آن رنگِ یک‌سانی ندارند. حداکثر تعداد ممکن رنگین‌کمان‌های دوبه‌دو یال‌مجزا در گراف K_n، ۱ $-n$ است که یال‌های گراف را افراز می‌کند. همچنین ثابت شده است که هر رنگ‌آمیزی یالی K_n حداقل یک رنگین‌کمان دارد. وجودِ چند رنگین‌کمانِ یال‌مجزا در رنگ‌آمیزی ساعتی موضوع بحثِ ما است. در واقع هنوز مشخص نشده است که K_n چند رنگین‌کمانِ دوبه‌دو یال‌مجزا دارد و یا برای چه nهایی K_n قابل افراز به رنگین‌کمان‌های دوبه‌دو یال‌مجزا است.

۲ رنگین‌کمان‌های منتظم در رنگ آمیزی ساعتی K_n

یک رنگین‌کمانِ منتظم را چنین تعریف می‌کنیم: رنگین‌کمانی که از یک یال به طولِ ۰ و ۱ $-\frac{n}{۲}$ یال با طولِ برابر تشکیل شده باشد. به نظر می‌رسد وجود نداشته باشد ۲ $<n$ای که K_n قابلِ افراز به چند رنگین‌کمانِ یال‌مجزا باشد ولی در موردِ رنگین‌کمان‌های منتظم این موضوع به راحتی اثبات می‌شود:

قضیه ۱. به ازای هیچ ۲ $<n$ای، K_n قابلِ افراز به رنگین‌کمان‌های منتظم نیست.

اثبات. می‌دانیم هر رنگین‌کمانِ منتظم ۱ $-\frac{n}{۲}$ یال با طولِ برابر(k) دارد و کلیه‌ی یال‌های به طولِ k هم باید به‌کار روند، ولی تعداد یال‌های به طول k، ۱ $-n$ است که بر ۱ $-\frac{n}{۲}$ بخش‌پذیر نیست، در واقع در بهترین حالت(بیشترین تعدادِ رنگین‌کمان‌های منتظمِ یال‌مجزای ممکن) می‌توانیم ۲ $-n$ رنگین‌کمانِ منتظمِ یال‌مجزا داشته باشیم که در این صورت به ازای هر ۱ $-\frac{n}{۲} \leq k \leq$ ۰ دقیقاً یک یال به طولِ k در هیچ رنگین‌کمانی شرکت ندارد. این تعداد(۲ $-n$) رنگین‌کمانِ منتظمِ یال‌مجزا برای ۶ $=n$ وجود دارد. □

تعریف. $T_{n,k}$ (n زوج و $2k|n-2$) برابر است با تطابق کاملی در K_n که از یالِ $\{0,\infty\}$ و $\frac{n}{2}-1$ یال به طولِ k تشکیل شده و به شکلِ زیر است:

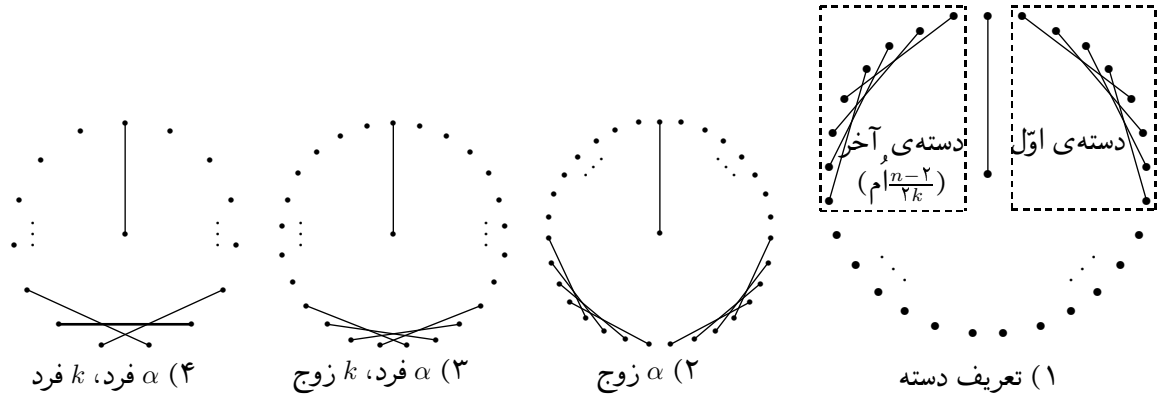
$$\{\{0,\infty\}\}+\{\{i+2jk,i+(2j+1)k\}|1\le i\le k, i+(2j+1)k\le n-2, 0\le j\le \frac{n-2}{2k}\}$$

قضیه ۲. اگر $n=4m$، $T_{n,k}$ هیچ‌گاه یک رنگین‌کمان نیست ولی اگر $n=4m+2$، $T_{n,k}$ همواره رنگین‌کمان است.

اثبات. در قسمتِ یکِ شکلِ زیر معنای دسته در $T_{n,k}$ نشان داده شده است. فرض می کنیم تعداد دسته‌ها α باشد پس $\alpha=\frac{n-2}{2k}$ و در هر دسته $2k$ راس وجود دارد. از آنجا که یال‌های به طولِ k نمی‌توانند همرنگ باشند پس $T_{n,k}$ رنگین‌کمان است اگر و فقط اگر یالِ $\{0,\infty\}$ با هیچ کدام از یال‌های به طولِ k همرنگ نباشد. چون هیچ یالی بین رئوس دو دسته وجود ندارد یال‌های درون هر دسته را بررسی می‌کنیم. به راحتی می‌توان دید تنها وقتی یالی عمود بر یال $\{0,\infty\}$ وجود دارد که α و k هر دو فرد باشند چون اگر α زوج باشد یالی بین رئوس ۱ تا $\frac{n-2}{2}$ و $1+\frac{n-2}{2}$ تا $n-2$ وجود ندارد و اگر α فرد و k زوج باشد هم یالی موازی $\{0,\infty\}$ نمی‌شود.

۱) $n=4m$: در این صورت $2k\alpha=n-2=4m-2$ پس $k\alpha=2m-1$، در نتیجه k و α فرد هستند پس یالی همرنگ با $\{0,\infty\}$ وجود دارد و نتیجه می‌شود $T_{n,k}$ یک رنگین‌کمان نیست.

۲) $n=4m+2$: در این صورت $2k\alpha=n-2=4m$ پس $k\alpha=2m$، در نتیجه حداقل یکی از k و α زوج است پس یالی همرنگ با $\{0,\infty\}$ وجود ندارد و نتیجه می‌شود $T_{n,k}$ یک رنگین‌کمان است.



□

تعریف. $T^{(i)}_{n,k}$: همان $T_{n,k}$ است که اعداد آن همگی به هنگ $(n-1)$ با i جمع شده‌اند. به علت تقارن می‌توان دید که به ازای هر $i\in Z$، $T^{(i)}_{n,k}$ رنگین‌کمان است اگر و فقط اگر $T_{n,k}$ رنگین‌کمان باشد.

لم ۲. $T^{(i)}_{n,k}$ و $T^{(i')}_{n,k'}$ دو رنگین کمانِ یال‌مجزا هستند اگر و فقط اگر هرکدام به تنهایی یک رنگین‌کمان بوده و

۱) $k\neq k'$ آنگاه $i\neq i'$

۲) $k=k'$ آنگاه $|i-i'|\equiv k \pmod{n-1}$

اثبات. اگر $k \neq k'$ در نتیجه تنها یال‌های هم‌طولِ دو رنگین‌کمان یال‌های $\{\infty, i\}$ و $\{\infty, i'\}$ هستند که اگر $i \neq i'$، این دو نیز مجزا خواهند بود. ولی اگر $k = k'$، اگر $|i - i'| \not\equiv k \pmod{n-1}$ آن‌گاه دو رنگین‌کمان حداقل در یک یال به طولِ k اشتراک خواهند داشت ولی در غیر این‌صورت طبق تعریفِ $T_{n,k}$ می‌توان دید که این دو، یال‌مجزا خواهند بود. □

قضیه ۳. به ازای هر $n = 4m + 2$ که $n > 10$، K_n حداقل ۴ به‌علاوه‌ی تعداد مقسوم‌علیه‌های $\frac{n-2}{2}$ رنگین‌کمانِ منتظمِ یال‌مجزا دارد.

اثبات. $T^{(0)}_{n,1}$، $T^{(1)}_{n,1}$، $T^{(2)}_{n,2}$، $T^{(4)}_{n,2}$، $T^{(3)}_{n,\frac{n-2}{2}}$، $T^{(3+\frac{n-2}{2})}_{n,\frac{n-2}{2}}$، $T^{(5)}_{n,\frac{n-2}{4}}$ و $T^{(5+\frac{n-2}{4})}_{n,\frac{n-2}{4}}$ تشکیلِ ۸ رنگین‌کمانِ یال‌مجزا می‌دهند. حال به ازای هر مقسوم‌علیهِ $\frac{n-2}{2}$ مثلِ k، غیر از ۱، ۲، $\frac{n-2}{4}$ و $\frac{n-2}{2}$، یک i را که یالِ $\{\infty, i\}$ استفاده نشده پیدا کرده (چنین iای حتما وجود دارد زیرا اگر وجود نداشته باشد به این معنی است که $n-1$ رنگین‌کمانِ یال‌مجزا انتخاب کرده‌ایم) و $T^{(i)}_{n,K}$ را به رنگین‌کمان‌هایمان می‌افزاییم، این تعداد، همان تعدادِ خواسته شده است. □

جدولِ حداکثرِ تعدادِ رنگین‌کمان‌های دوبه‌دو یال‌مجزای گراف K_n (t_n) برای nهای کوچک

t_n	n
۱	۲
۰	۴
۴	۶
۳	۸
$\geq$ ۸	۱۰
$\geq$ ۱۰	۱۲
$\geq$ ۱۱	۱۴
$\geq$ ۱۲	۱۶
$\geq$ ۱۳	۱۸
$\geq$ ۱۴	۲۰
$\geq$ ۱۵	۲۲
$\geq$ ۱۵	۲۴
$\geq$ ۱۵	۲۶

مراجع

[۱] دکتر سیّد عباداله محمودیان و مهندس محمّد مهدیان، *ریشه‌های یک مساله‌ی المپیادِ جهانی ریاضی سال ۱۹۹۷*، مجله‌ی رشدِ آموزشِ ریاضی، سالِ دوازدهم، شماره‌ی ۵۱، بهارِ ۱۳۷۷ و فصلنامه‌ی دانش‌پژوه، شماره‌ی ۲، زمستانِ ۱۳۷۷.

[2] Charles J. Colbourn and Jeffrey H. Dinitz, *Latin Squares, MOLs and Orthogonal arrays*, The CRC Handbook of Combinatorial Designs.